ಸಮಸ್ಯಾ ಕೋನ

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಮಂಡನೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕುರಿತು

ಪೃಥ್ವಿಜಿತ್ ಡೇ

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಮಂಡನೆ ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರ ಇವು ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ. ಗಣಿತದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬೋಧಿಸಿದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಅನ್ವಯಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಕಲಿಯಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ವಿವಿಧ ಮಟ್ಟದ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆ ಇರುವ ಅನೇಕಾನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿಕೊಡುವುದು ವಿರಳ. ಗಣಿತದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯಾ ಮಂಡನೆಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಮಹತ್ವವನ್ನು ನೀಡಿಲ್ಲ. ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಸರಳ ಗಣಿತೀಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ/ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದ ನೂತನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ವಿಶದಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೊದಲಿಗೆ ಒಂದು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಸಮಸ್ಯೆ: a, b, c ಗಳು ಮೂರು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ (real) ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

ಇದನ್ನು ನೆಸ್‌ಬಿಟ್‌ರ ಅಸಮಾನತೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಈ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಹಲವಾರು ಸಾಧನೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯ-ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯ (AM-HM) ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆ.(ಪಟ್ಟಿ 1 ನೋಡಿರಿ). ಎಡದಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು p ಎಂದು ಕರೆದು ಪ್ರತಿ ಬಿಡಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ 1 ಅನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ:

$$p + 3 = \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right)$$
$$= (a + b + c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$$

ನಂತರ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $(b + c)/2$, $(c + a)/2$ ಮತ್ತು $(a + b)/2$ ಗಳಿಗೆ (AM–HM) ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ಮೂಡುತ್ತದೆ:

$$\therefore \quad \frac{\frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2}}{3} \geq \frac{3}{2\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)},$$

$$\therefore \quad \frac{(a+b+c)}{3} \geq \frac{3}{2\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)},$$

$$\therefore (a+b+c) . \left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2} \ ,$$

ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಸಮಸ್ಯಾ ಮಂಡನೆ, ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ, ನೆಸ್‌ಬಿಟ್‌ರ ಅಸಮಾನತೆ, ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯ-ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯ ಅಸಮಾನತೆ

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $p + 3 \geq \frac{9}{2}$ ಎಂಬ ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆತಿತು. a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ಸಮ ಆಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

AM-GM-HM ಅಸಮಾನತೆ

AM-GM ಅಸಮಾನತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಈ ರೀತಿ ಇದೆ: ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯವು ಯಾವುದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಾಧ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಎರಡೂ ಮಾಧ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ: ಎಲ್ಲ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಲ್ಲ ವಿಧದಲ್ಲಿಯೂ ಸಮವಾಗಿರುವಾಗ.

ಚಿಹ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ಗಳು n ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯ (AM) ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಾಧ್ಯಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ:

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$GM = (a_1 . a_2 . \ldots , a_n)^{1/n} .$$

ಅಲ್ಲದೆ AM $\geq$ GM

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ $a_1 = a_2 = \ldots, = a_n$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

AM-GM ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯವನ್ನು (HM) ಸಹ ಒಳಗೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬಲಪಡಿಸಬಹುದು.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ಇತ್ಯಾದಿ n ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಾಧ್ಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots . \frac{1}{a_n}}$$

AM-GM-HM ಅಸಮಾನತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಈ ರೀತಿ ಇದೆ:

$AM \geq GM \geq HM.$

ಅಲ್ಲದೆ, ಸಮಾನತೆಯ ಚಿಹ್ನೆ(=)ಯು $a_1 = a_2 = \ldots\ldots, = a_n$ ಇದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಪ್ರಸ್ತುತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಉದಾಹರಣೆ: 8, 9, 16, 18 ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಈಗ:

$$AM = \frac{8+9+16+18}{4} = \frac{51}{4} = 12.75,$$

$$GM = (8X9X16X18)^{1/4} = 12,$$

$$HM = \frac{4n}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}} = \frac{192}{17} \approx 11.29$$

AM >GM >HM ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಈ AM-GM-HM ಅಸಮಾನತೆಯು ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಗುಣವಾಗಿದೆ. ಇದು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬಹುತೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ದೊರಕಿದ ತಕ್ಷಣ ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲ್ನೋಟಕ್ಕೆ ಕಂಡದ್ದಕ್ಕಿಂತಲೂ ವಿಶೇಷವಾದ ಮತ್ತೇನಾದರೂ ಸಂಗತಿ ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಸಹ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಾವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಪರಿಶೋಧಿಸಿ, ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಮತ್ತಷ್ಟು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಟ್ಟಿಸಿ, ಉದ್ಭವಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತಿರುವಂತೆಯೇ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನೂ ಕೊಡುತ್ತಾ ಸಾಗುತ್ತೇವೆ.

ದತ್ತ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ p ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಕೇಳುವುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವೇ. ಇನ್ನೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಇದೇ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುತ್ತೇವೆ:

ಪ್ರಶ್ನೆ: ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a, b, c ಗಳಿಗೆ $P < k$ ಎನ್ನುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ k ಎಂಬ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ ಇದೆಯೆ?

ಇಲ್ಲಿಯೂ, ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ,

p = $\frac{a}{b+c}$ + $\frac{b}{c+a}$ + $\frac{c}{a+b}$
ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ: ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನಿಭಾಯಿಸುವ ಬಗೆ ಹೇಗೆ? k ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಮೌಲ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮೀಕರಣ ಸಂಬಂಧಿತ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುವೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು ಒಂದು ವಿಧ. K ಯು $\frac{3}{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ 'ಸ್ನೇಹಮಯಿ' ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದುದು. K = 2 ಹಾಕಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಈಗ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a, b, c ಗಳಿಗೆ P < 2 ಇದೆಯೇ ಎಂದು ನಾವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{a}{b+c}$ ಯನ್ನು 2 ಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು. ಈ ಅಂಶದಲ್ಲಿ b = c = 1 ಮತ್ತು
a = 6 ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಅಂಶವು 2 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಇದೊಂದೇ ಕ್ರಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ. $\frac{a}{b+c} > 2$ ಆಗುವಂತೆ a, b, c ಗಳಿಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ
P> 2 ಆಗಲು ನಾವು a, b, c ಗಳಿಗೆ ಅನೇಕಾನೇಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ 2 ರ ವಿಶೇಷತೆಯೇನಿಲ್ಲ. ನಾವು 2 ರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k ಅನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, ಆಗಲೂ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a, b, c ಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\frac{a}{b+c} >$ k ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ($a = 2k + 2, b = c = 1$ ಅನ್ನು ಸಹ ಒಂದು ಆಯ್ಕೆಯಾಗಿ ಹೊಂದಬಹುದು; ಆಗ $\frac{a}{b+c} = k + 1$). ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k ಅನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ, P> k ಇರುವಂತೆ ನಾವು a, b, c ಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ a, b, c ಗಳಿಗೆ P < k ಆಗುವಂತಹ ಮೌಲ್ಯವುಳ್ಳ k ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ನಾವು ತಲುಪುತ್ತೇವೆ.
ಹಾಗಾದರೆ ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ a, b, c ಗಳಿಗೆ P < k ಆಗುವಂತಹ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k ದೊರಕುವ ಸ್ಥಿತಿ ಮೂಡಬೇಕಾದರೆ a, b, c ಗಳಿಗೆ ಮತ್ತೆ ಯಾವ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮೂಡುತ್ತದೆ. a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಸೀಮಿತ ಅಂತರದಲ್ಲಿ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ 0,1) ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿದರೆ ಹೇಗೆ? ಎಂದರೆ 0 ≤ a ≤ 1, 0≤ b ≤ 1, 0 ≤ c≤ 1. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಹ ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k ಗಿಂತ p ಅನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ t ಎಂಬುದೊಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $ta \le 1$, $tb \le 1$ ಮತ್ತು $tc \le 1$ ಇರುವಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು c ಗಳ ಬದಲಿಗೆ ta, tb, ಮತ್ತು tc ಗಳನ್ನು

ಬಳಸಿದರೂ $\frac{a}{b+c}$ ಭಿನ್ನಾಂಶದ ಮೌಲ್ಯವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬೇಡಿಕೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದರೆ:

$$b + c > a, \quad c + a > b, \quad a + b > c, \qquad (2)$$

ಆಗ ನಿಜಕ್ಕೂ ನಮಗೆ $P < 3$ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, a, b ಮತ್ತು c ಗಳು ತ್ರಿಕೋಣವೊಂದರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಾದರೆ, ಆಗ $P < k$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗುವಂತಹ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k (=3) ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನಾವು ಇದನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಬಹುದು. ನಾವು *P* ಅನ್ನು 2 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆ? ಇದನ್ನು ಕಾಣಬೇಕೆಂದರೆ, $c = \max(a, b, c)$ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ

$$\frac{a}{b+c} \le \frac{a}{a+b}, \quad \frac{b}{c+a} \le \frac{b}{a+b} \quad \frac{a}{b+c} \le 1, \qquad (3)$$

ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 \qquad (4)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

P ಯಾವಾಗಲಾದರೂ 2 ಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುವುದೆ? ಓದುಗರು ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಚಿಂತಿಸಬಹುದು.

$P < 2$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಮೂಲ ಗುಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸುವ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನವೂ ಇದೆ. x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $x < y$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ t ಗೆ,

$$\frac{x}{y} < \frac{x+t}{y+t} \qquad (5)$$

ಸಾಧನೆ ನೇರ ಹಾಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ; ಅಡ್ಡ-ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮರುಜೋಡಿಸಿರಿ. ಈ ಅಂಶದ ರೀತ್ಯಾ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣ ಅಸಮಾನತೆ ಗುಣದ ರೀತ್ಯಾ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ;

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c} \qquad (6)$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$P < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \qquad (7)$$

ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣ

ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು 3 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣ ಅಥವ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣಗೊಳಿಸಬಹುದೆ ಎಂದು ನೋಡುವುದೇ ಮುಂದಿನ ಹೆಜ್ಜೆ. ನಮ್ಮ ಮುಂದಿರುವ ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿದೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $n \geq 4$ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$Q = \frac{a_1}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \qquad (8)$$

ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Q ನ ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವೇನು?

P ಮತ್ತು Q ಗಳ ರಚನಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿನ ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭೇದಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ($a + b + c$ *ಇದು* P ಗೆ ಮತ್ತು $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *ಇದು* Q ಗೆ). P ಗೆ ಬಳಸಿದ ಕ್ರಮವನ್ನೇ Q ಗೆ ಬಳಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಸಾಮ್ಯತೆಯು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$Q + n = s\left(\frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_n}\right) \qquad (9)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ AM=HM ಗುಣವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\frac{\left(\frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_n}\right)}{n} \geq \frac{n}{ns-s} = \frac{n}{(n-1)s} \qquad (10)$$

ಆದ್ದರಿಂದ $$Q + n \geq \frac{n^2}{n-1} \qquad (11)$$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ $Q \geq \frac{n}{n-1}$ ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರಕುತ್ತದೆ. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ಆಗಿರುವಾಗ $Q = \frac{n}{n-1}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Q ನ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು $\frac{n}{n-1}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

P ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ನ ಮೇಲೆ ನಿಬಂಧನೆಯೊಂದನ್ನು ವಿಧಿಸದಿದ್ದರೆ Q ನ ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ಮೊದಲು ಅನ್ವಯಿಸಿದ 3 ಚರ ಪರಿಮಾಣ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ, 1 = 1,2,...,n ಆಗಿರುವಾಗ

$$s - a_i > a_i \qquad (12)$$

ಆಗಿರಲಿ ಎಂಬ ಬೇಡಿಕೆಯನ್ನು ಮುಂದಿಡೋಣ. ಕೂಡಲೆ $Q < n$ ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶವು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾದ ಮತ್ತು ಅಷ್ಟು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಾರದ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ನಾವು $Q < 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲು ಬಳಸಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{a_i}{s-a_i} < \frac{a_i + a_i}{s - a_i + a_i} = \frac{2a_i}{s} \qquad (13)$$

ಆದ್ದರಿಂದ $$Q < \frac{2\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{s} = 2 \qquad (14)$$

ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ Q ನ ಮೌಲ್ಯ 2ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗುವುದೇ ಎಂದು ಆಲೋಚಿಸುವುದನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಓದುಗನಿಗೇ ಬಿಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮತ್ತು ತಿಳಿದಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕವೋ ಅಥವಾ ಸರಳ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣದ ಮೂಲಕವೋ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕಬಹುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು. ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ತರವನ್ನು ತಲುಪಲು ಅನುವು ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಅನ್ವೇಷಣ ಸಹಾಯಕ (ಹ್ಯೂರಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್)ಗಳೂ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸಿದವು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನಾಗಲಿ, ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನಾಗಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಬೋಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಮಸ್ಯಾ ಮಂಡನೆ ಅಥವ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರದತ್ತ ಶೋಧನೆ-ಕೇಂದ್ರಿತ ಆಲೋಚನೆಯ ಬೀಜವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯಶಃ ಬಿತ್ತಬಹುದು.

ಪೃಥ್ವಿಜಿರ್ ಡೇ TIFRನ ಹೋಮಿ ಬಾಬಾ ಸೆಂಟರ್ ಫಾರ್ ಸೈನ್ಸ್ ಎಜುಕೇಷನ್ (HBSCE)ನಲ್ಲಿರುವ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್ ಸೆಲ್‌ನ ಸದಸ್ಯ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಇರುವಷ್ಟೇ ಒಲವನ್ನು ಜನಪ್ರಿಯ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧಿ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಓದುವುದರಲ್ಲಿಯೂ, ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿಯೂ ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರ ಇತರ ಆಸಕ್ತಿಗಳೆಂದರೆ ಒಗಟುಗಳು, ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಮತ್ತು ಸಂಗೀತ. ಇವರ ಸಂಪರ್ಕ ಕೊಂಡಿ de.prithwijit@gmail.com